

Polar Instruments 参考技術資料
プリント基板トラック・インピーダンスの計算

目 次

はじめに	1
代数方程式	1
数値原理	2
数値結果	3
実用的結果	4
まとめ	5
おわりに	5

Polar Instruments Ltd

OPPC(株)

はじめに

高速回路の使用にはPCBトラックが制御(特性、差動)インピーダンスを含めて設計される必要があります。ワーデル(Wadell)はこれらのインピーダンスを評価する方程式の中でも最も包括的な出版物の一つです。これにはストリップライン、サーフェイス・マイクロストリップや多様なコープレーナー等、多くの構成があります。

IPCの発行する IPC-2141^[2]はもう一つの方程式の出版物ですが、比較的狭い(IPC-D-317A に示されているものに類似した)構成範囲を持っています。

しかし、これらの発行物の中で幾つかの構成の方程式には違いがあります。著者はそれらの方程式の根源を調べ、PC用に使用する計算法をアップデートすることが適切であると考えます。まず、例として図1のサーフェイス・マイクロストリップを参照ください。

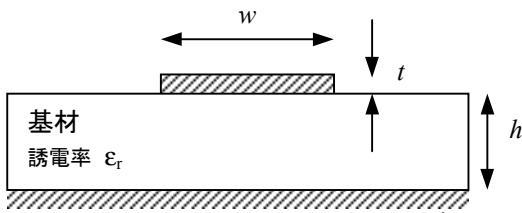


図1 - サーフェイス・マイクロストリップ

IPC-2141^[2]では特性インピーダンスを

$$Z_0 = \frac{87.0}{(\epsilon_r + 1.41)^{\frac{1}{2}}} \ln \left[\frac{5.98 h}{0.8 w + t} \right] \quad \text{式(1)}$$

と示し、ワーデル^[1]は以下の様に示します。

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{2.0 \sqrt{2.0 \pi (\epsilon_r + 1)^{\frac{1}{2}}}} \ln \left[1.0 + \frac{4.0 h}{w'} (A + B)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{式(2)}$$

$$A = \frac{14.0 + 8.0/\epsilon_r}{11.0} \times \frac{4.0 h}{w'} \quad \text{式(3a)}$$

$$B = \left(A^2 + \frac{1.0 + 1.0/\epsilon_r}{2.0} \times \pi^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{式(3b)}$$

$$w' = w + \Delta w' \quad \text{式(3c)}$$

パラメーター w' は矩形側面(幅 w と厚み t)での厚みがゼロのトラックの幅と同等とされます。ワーデルにおいては増加する $\Delta w'$ 値を求めるための追加式が与えられます。式(2)のパラメーター η_0 は自由空間(又は真空)、376.7 Ω (=120π)でのインピーダンス値です。仕様上確度は ϵ_r 、 w のどちらの値とも2%とします。

表1は $1/32$ インチの絶縁体上に 1 oz の銅トラックが構成されているポピュラーなサーフェイス・マイクロストリップに式(1)と(2)を使用した結果を表しています。

図1 - 方程式の計算結果

幅 w (μm)	数値解法 Z_0 (Ω)	式(1)		式(2)	
		Z_0 (Ω)	% Error	Z_0 (Ω)	% Error
3300	30.09	21.08	-29.94	29.89	-0.66
1500	50.63	49.46	-2.31	50.50	-0.26
450	89.63	91.79	+2.41	89.89	+0.29

$t = 35\mu\text{m}$, $h = 794\mu\text{m}$, $\epsilon_r = 4.2$

(誤差計算は数値解法が正確であるものと仮定します:
数値結果参照)

表1では式(2)の確度は仕様内に収まっています。式(1)の確度は様々ですが、この式は簡易さの面で有利であり、幅 w と厚み t が変わることごとに Z_0 値の一般的な変化を説明するには使い易くできます。

表1で示されるように、この例は出版されている式の一般的な問題「複雑式は通常、より正確であること」を強調しています。どの式が正確かという範囲は、通常有限なパラメーターの範囲に制限されます。(例、 w/h , t/h , ϵ_r)

式(2)は複雑ですがプログラム機能付計算機又はコンピュータースプレッドシートを使用し評価することができます。しかし、差動インピーダンスを求める上で、2対のトラックが使用される時複雑さが非常に増します。2対のサーフェイス・マイクロストリップには、ワーデル^[1]の場合インピーダンスの評価に7ページ程の計算式を要します。

現在では計算機やスプレッドシートを使用してのインピーダンス評価はかなりの大仕事になってしまっています。

代数方程式

シングル・トラック

図2のような厚みゼロの相対中央トラックのストリップラインにおいて、コーン(Cohn)^[3]は正確な特性インピーダンスの値として以下を示しています。

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{4.0 \sqrt{E_r}} \frac{K(k)}{K(k')} \quad \text{式(4)}$$

$$k = \operatorname{sech} \left(\frac{\pi w}{2.0 h} \right) \quad \text{式(5a)}$$

$$k' = \tanh \left(\frac{\pi w}{2.0 h} \right) \quad \text{式(5b)}$$

K は第1種完全橋円積分関数です。橋円積分関数の比率の評価用方程式(確度 10^{-12})はヒルバーグ(Hilberg)^[5]によって与えられ、ワーデル^[1]にも引用されています。

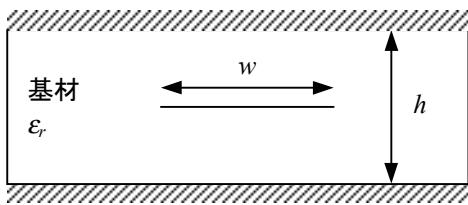


図2 – ストリップライン: 中央トラック

厚みがゼロでない時、近似^[1]での修正が必要です。これらの修正は理論的近似や基礎的電磁界方程式に基づく数字式の結果の曲線のあてはめから得られます。

トラックが中央からオフセットの場合、発行されている方程式はより複雑になり、与えられた確度に対し、正当度の範囲が狭まります。

最終的に断面が台形^[1]になるように、トラックの差動エッジングの影響を含む為の試みもなされています。

式(4)のような閉形方程式は、表面上マイクロストリップ、又は、埋め込まれたマイクロストリップ(どのトラックの厚みにおいても)用にはありません。よって、インピーダンス計算に使用されるどの方程式も表1に示されているように近似になります。

結合コープラナー・トラック

図3では2本の結合コープラナー中央ストリップライン・トラックを示しています。

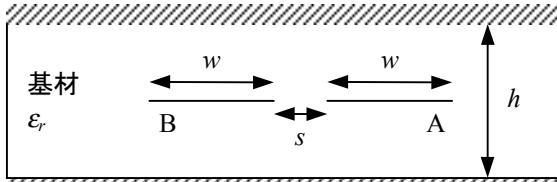


図3 – ストリップライン: コープラナー結合中央トラック

全ての結合構成用のインピーダンス方程式は偶数モード(Even-mode・ Z_{0e})と奇数モード(Odd-mode・ Z_{0o})の双方に関係しています。これらのインピーダンスはトラックとグラウンド面の間で測定されます。 Z_{0e} はトラックAとBがグラウンド面に対し共に+Vであるときに起き、 Z_{0o} はトラックAが+VでトラックBが-Vの時に起きます。差動信号はAB間に加えられ、奇数モード構成のようにトラック間に電圧が生じます。この信号に現れるインピーダンスが差動インピーダンスです。

$$Z_{diff} = 2 \times Z_{0o} \quad \text{式(6)}$$

全ての出版された方程式[1]は Z_{0o} を算出します。差動インピーダンスは式(6)を使用し得られなければなりません。

図2のような厚みゼロの構成において、コーン^[3]は正確な表現をしています。

$$Z_{0o} = \frac{\eta_0}{4.0\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k_0)}{K(k'_0)} \quad \text{式(7)}$$

$$k_0 = (1 - k'_0)^2 \quad \text{式(8a)}$$

$$k'_0 = \tanh\left[\frac{\pi w}{2.0h}\right] \coth\left[\frac{\pi(w+s)}{2.0h}\right] \quad \text{式(8b)}$$

前述のように K は第1種楕円積分関数であり、コープラナー結合トラック用の閉形方程式はありません。

トラック厚の影響

トラックの厚みがゼロでない時、式(4)や(7)に類似した代数方程式を得る為に近似が行われなければなりません。その代わりとして、膨大な数値計算のカーブ・フィッティングに基づく方程式が使われます。

しかし、式(1)から示されるように厚みが増すに従いインピーダンスは低下します。

数値原理

均一な伝送システム^[1,6]のパルスの Z_0 は以下のように示されます。

$$Z_0 \quad (\text{or } Z_{0o}) = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{式(9)}$$

L 、 C はラインの単位長毎のインダクタンスとキャパシタンスです。

電(磁)界が均一層内にあるストリップラインの誘電定数 ϵ_r の方程式(9)は以下のようになります。(C は真空(又は自由空間)での光速度)

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{cC} \quad \text{式(10)}$$

伝送路上のパルス速度は以下の速度で進みます。

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{式(11)}$$

電(磁)界が空間と基板にあるマイクロストリップでは、以下のようになります。

$$Z_0 = \frac{1}{c\sqrt{CC_{air}}} \quad \text{式(12)}$$

C_{air} が基板を除く同じトラック構成の容量である場合、実効誘電定数は以下のようになります。

$$\epsilon_{eff} = \frac{C}{C_{air}} \quad \text{式(13)}$$

インピーダンスを求める為には容量が算出されなければなりません。以下の式のように、これはトラックに電圧を与えて、単位長 Q にて全電荷を計算することによってできます。

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{式(14)}$$

しかしトラックの表面電荷は均一ではなく、実際のところ トラック・コーナーではとても高いので、全電荷を求めるのは難しいのです。

静電学の原理から、電荷は電荷からの距離 r において電圧を作ることが知られていますので、電荷分布 ρ (クロン/トラックの単位幅)で電圧が求められます。(δl は短丈、 G は単位電荷による電圧で、トラック断面の周辺長が積分される際)

$$V = \int G \rho \delta l \quad \text{式(15)}$$

これはグリーン関数としても知られています。 G の値は構成(又は環境)に依存します。例えば、導体なしの2次元誘電空間での点電荷は以下となり

$$V = -\frac{\rho \ln(r)}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \quad \text{式(16a)}$$

$$\text{よって } G = -\frac{\ln(r)}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \quad \text{式(16b)}$$

となります。

式(15)にて、電圧 V と特定のトラックと基板の構成上 G は分っていますが、電荷 ρ は分っていません。よって、式(15)はモーメント法(MoM)^[7]により数学的に解決される積分方程式となります。

モーメント法で進める為に、トラックの断面周囲はそれぞれの端部の節で短い丈に分割されます。電荷はそれぞれの節に割り当てられます。それぞれの節の電圧は全ての節の電荷と節間の見積り電荷の変化から計算されます。これで、(ρ が節点電荷のベクトル、 V が節点電圧のベクトルでの)行列方程式に代表される同時処理方程式の集合を導きます。

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{V} \quad \text{式(17)}$$

A はグリーン関数が関与する積分から計算される要素を持つ正方行列です。行列のサイズは節の数に依存します。式(17)は与えられた節点電圧 V から節点電荷 ρ を計算することができます。 V の要素は通常+1又は-1で、構成に依存しています。

総合電荷は節点電荷の適切な和により得られます。

この一般的なアプローチはさまざまなインピーダンスを評価するため殆どの著者により使用されています。殆どの計算法は、主要な計算機がメイン・フレーム・コンピューターであった15~20年前に出版されています。その結果、当時は小型計算機で使用できる方程式の需要がありました。

現在、著者は基本の数学的アプローチを再調査し、デスクトップPCで容易に制御インピーダンスの計算ができるソフトウェア(CITS25)を開発しました。そのソフトは非

常に素早く稼動し、文献ではうまく表せなかった構成(以下参照)の計算までできるよう拡張されています。

- オフセット結合ストリップライン
- ブロードサイド結合ストリップライン
- エンベデッド結合マイクロストリップ

厚みを持つトラックは通常トラックの差動エッティングを見込んで台形断面を持つと考えられています。

数値結果

この項では、より詳しい数学的手法、及び、その結果と正確な方程式(4)、(7)との比較を説明します。

全ての例にて、グラウンド面の電荷イメージが使われ、その構成のグリーン関数が得られます。これらのイメージには限りない数があります。ストリップラインの場合、イメージの和はサディーク(Sadiku)^[9]によって与えられた結果に収束します。シルベスター(Silvester)^[10,11]はサーフェイス・マイクロストリップのイメージ法を、そして今、著者によりエンベデッド・マイクロストリップのイメージ法が開発されました。全ての例において、イメージの概要は収束しますが、結果は数学的に得られなければなりません。

節間の要素への電荷の分配は線状と仮定されています。数学的特異(Singularity)は電荷節 j が電圧節 i と一致するとき起きます。サディーク^[9]はこれをどう解決するか指示しています。要素 A_{ij} の評価は有限要素の手法^[12,13]と同じ方法で、数学的及び解析的積分から成ります。

電荷の大終結がある角部の数学的不正確をさける為に、角部の要素の丈は非常に小さくされます。他の要素や節は小林氏^[14]の記述した手法によって分配されます。これは同じ小さな要素が使われる時、広幅ストリップは狭幅ストリップよりも多くの節を必要とするという意味です。

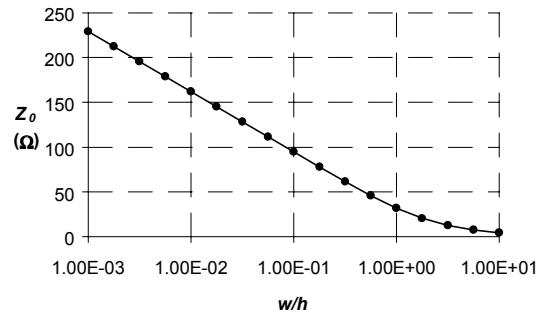


図 4 – 異なる比較幅でのインピーダンス (誘電率 Er = 4.2)

この表示の結果は編集されたCープログラムを使用し 233MHz で稼動する Intel Pentium Pro 内蔵のPCで行われたものです。

シングル・トラック・ストリップライン

図4は図2のストリップラインのトラック幅とインピーダンスの変化を表しています。

図5は式(4)で与えられた正確な値と比較された数値計算との誤差(%)です。2本の曲線は異なる角部の要素を示しています。(例: トラッカの端部)

更に図5では、精度は約 4×10 進以上の幅/丈の比率で得られることを示しています。全ての値においてコンピューターの処理時間は0.5秒未満でした。

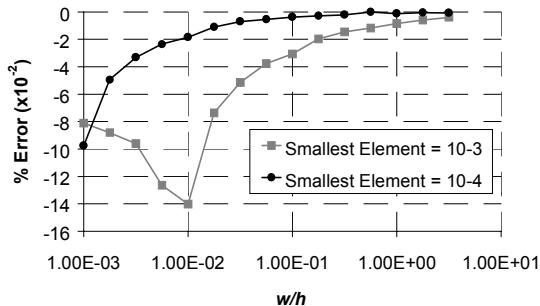


図5 – 基板材料 $\text{Er}=4.2$

図6は図3のストリップラインの奇数モードでのインピーダンスの変化を表しています。

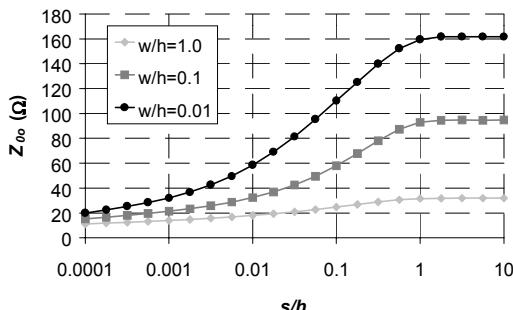


図6 – 異なる分離(s/h)と幅(w/h)での奇数モード・インピーダンス

結合コープレナー・ストリップライン

図7は最小の要素として 10^{-3} を使い、式(7)に与えられた正確な値と比較された数値計算との誤差(%)を表しています。最大処理時間は0.5秒未満です。最大誤差は最小要素を減少させることで減らせます。 $6.0 \times 10^{-2}\%$ の最大誤差では、処理時間は5.1秒必要です。

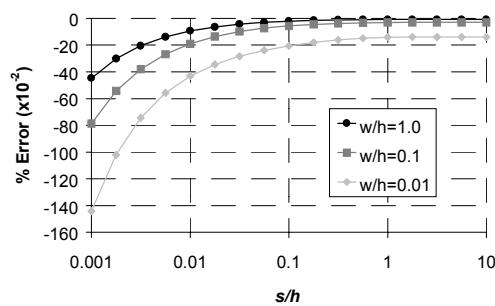


図7 – 誤差(%) $\text{Er}=4.2$

図7で表された結果は、sによって分けられた鋭い角部

の為、数学的手法にとって非常に厳しいテストを提供しています。奇数モードでの構成にて、トラックは反極性なので、この影響はより過大されます。この数値確認は有限要素ソフトを使っての丸みを帯びたトラックの対(例、平衡伝送配線)において、ボガティン(Bogatin)^[15]及びその他の著者による結果より良質のものと考慮されています。この後半において角部での特異点はありません。リー(Li)、藤井両氏^[16]は、ストリップラインとマイクロストリップに関する(MoMの関連している)境界要素解析は有限要素解析よりも正確であると述べています。

サーフェイス・マイクロストリップ

前記のように閉形代数方程式はありません。しかし、この論文の前項では、ソフトウェアは特に実用目的用に正確に製作されると言えられています。表1は図1の構成の計算を示しています。グリーン関数は和が関与し、2つの容量CとCapが必要なので、処理時間はストリップラインのものよりも長くなります。3300 μmの幅で最長時間は4.5秒未満でした。

表面上結合マイクロストリップでは、3300 μmの2本の厚みを持つトラックでは5.1秒の処理時間が必要になります。分離は時間に影響を及ぼしません。

実用的結果

フィールド・ソルビング境界要素解析の実用度を確認するために、著者はサンプル・セットの製造を依頼しました。1998年の6ヶ月間で、1500種類のプリント配線版が製造されました。

サンプルは表面上、及び、埋め込まれた構造にて、ストリップライン、マイクロストリップ差動構成からなります。2種類の連結構造(エッジ連結、ボードサイド連結)も含まれています。1/2、1、2ozの塗基銅を使い1~4トラック幅の差動分離で、トラックの寸法の範囲は幅75 μm~1000 μmです。結果として得られた差動インピーダンスの範囲は80~100 Ωでした。

テスト・サンプルは英国内のPCBメーカー3社^[17]に製造していただき、Polar社にてCITS500s測定器のTDR機能を使用しそれらの差動インピーダンスの電気的測定を行いました。

電気的測定後、サンプルは実際の物理的メカニカル寸法を決定するマイクロセクション解析の為にメーカーに返されました。

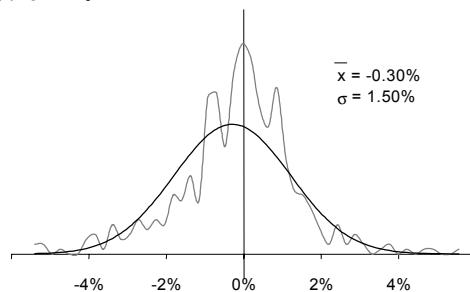


図8 – ストリップラインの予測値と測定値の差違の分布

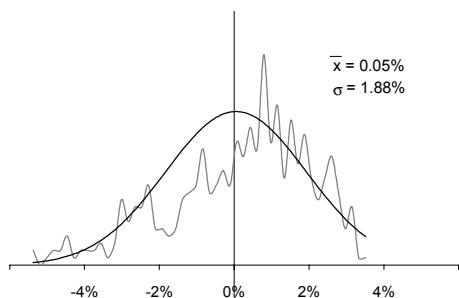


図9 – 埋め込まれたマイクロストリップの予測値と測定値の差違の分布

計算されるインピーダンスはメカニカルマイクロセクションと得られたFR-4材質の比較上誘電率 ϵ_r の値から予測されました。結果^[18]は分析され電気的測定や理論的計算された結果の比較は図8と図9に表されています。

ディスカッション

この電気的測定の精度は、1~2%の範囲で評価されます。これは測定器とテストサンプルとのインピーダンス値と内部接続の質に依存します。テストサンプルは電気的に平衡になるよう設計されましたが、製造工程は完全平衡なトレースを製造することはできません。

微小断面寸法は1%の見積り精度がありますが、モデルは相対的と仮定し、1%程とみられる更に小さな平均誤差を導きます。よって実用結果の総合不確実性は3~4%と予測されます。図8と図9は0.5%以下の平均偏差と2%以下の標準偏差を表しています。

これらの実用的な結果として、測定された電気的結果と数計算された結果の誤差は、この測定方法の予測不確定度範囲内に納まるることを明らかに表しています。

おわりに

著者は、初期の制御インピーダンス計算の方法は今やパソコンを使用してできることを示しました。その確度は出版された代数の方程式と同等もしくはそれ以上です。処理時間は10秒以下でこれは殆どのケースにおいて受け入れられる速さです。

更に、構成数は拡張でき、同種の断面プロファイル等は容易に取り入れられるでしょう。

参考文献

- [1] Wadell, Brian C – Transmission Line Design Handbook Artech House 1991
- [2] IPC-2141 – Controlled Impedance Circuit Boards and High-Speed Logic Design, April 1996
- [3] Cohn, Seymour B. – Characteristic Impedance of the Shielded-Strip Transmission Line IRE Trans MTT-2 July 1954 pp52–57
- [4] Abramowitz,Milton and Irene A Stegun – Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York 1965
- [5] Hilberg, Wolfgang – From Approximations to Exact Relations for Characteristic Impedances. IEE Trans MTT-17 No 5 May 1969 pp259–265
- [6] Hart, Bryan – Digital Signal Transmission Pub: Chapman and Hall 1988
- [7] Harrington, Roger F – Field Computation by Moment Methods, Pub: MacMillan 1968
- [8] CITS25 – Differential Controlled Impedance Calculator Polar Instruments Ltd, <http://www.polar.co.uk>, 1998
- [9] Sadiku, Matthew N O – Numerical Techniques in Electromagnetics, Pub: CRC Press 1992
- [10] Silvester P P – Microwave Properties of Microstrip Transmission Lines. IEE Proc vol 115 No 1 January 1969 pp43–48
- [11] Silvester P P & Ferrari R L – Finite Element for Electrical Engineers Pub, Cambridge university Press 1983
- [12] Brebbia, C A – The Boundary Element Method for Engineers, Pub: Pentech Press 1980
- [13] Paris, Federico and Canas, Jose – Boundary Element Method : Fundamentals and Applications Pub: Oxford University Press 1997
- [14] Kobayashi, Masanori Analysis of the Microstrip and the Electro-Optic Light Modulator IEEE Trans MTT-26 No 2 February 1979 pp119–127
- [15] Bogatin, Eric; Justice, Mike; DeRego, Todd and Zimmer, Steve – Field Solvers and PCB Stack-up Analysis: Comparing Measurements and Modelling IPC Printed Circuit Expo 1998 paper 505–3
- [16] Li, Keren and Fujii, Yoichi – Indirect Boundary Element Method Applied to Generalised Microstrip Analysis with Applications to Side-Proximity Effect in MMICs IEE Trans MTT-40 No 2 February 1992 pp237–244
- [17] The authors wish to acknowledge the assistance of Kemetron Technologies plc, Stevenage Circuits Ltd and Zlin Electronics Ltd.
- [18] Surface microstrip results were yet to be completed at the submission date for this paper.

著者: Andrew J Burkhardt, Christopher S Gregg, and J Alan Staniforth

日本語訳: OPPC(株) 阪 理